Massimo Angrisani (massimo.angrisani@uniroma1.it)
Dipartimento di matematica per le decisioni economiche, finanziarie ed assicurative
Università degli Studi di Roma "La Sapienza", Facoltà di Economia
Via del Castro Laurenziano 9, 00161 Roma

Cinzia Di Palo (c.dipalo@unicas.it)
Dipartimento Istituzioni, Metodi Quantitativi e Territorio
Università degli Studi di Cassino, Facoltà di Economia
Via S. Angelo, 03043 Cassino

Dinamiche demografiche e sistemi pensionistici

Abstract

Il lavoro si propone di sviluppare un modello matematico formale che sia descrittivo delle funzioni di un sistema pensionistico senza far ricorso ad ipotesi semplificatrici. La descrizione della realtà demografica di tale modello considera un istante attuale di osservazione, cioè un istante rispetto al quale la collettività del sistema risulta suddivisa in due classi, rispettivamente della popolazione attiva e della popolazione dei pensionati. A partire dalla situazione osservata nell'istante attuale, il modello analizza l'evoluzione nel tempo della struttura demografica delle due collettività ed evidenzia l'impatto che tale evoluzione ha sulle funzioni descrittive dello stato del sistema pensionistico.

L'obiettivo del lavoro è di "superare" la semplificatrice ipotesi di stabilità economica e demografica (ipotesi di steady state), e definire un contesto logico – matematico entro il quale poter affrontare l'analisi della sostenibilità dei sistemi pensionistici in modo efficace e realistico. Questo studio risulta anche preparatorio per poter esplicitare analiticamente le condizioni di sostenibilità logica introdotte in Angrisani, *The logical sustainability of the pension system*, 2008.

Keywords: sistemi pensionistici, dinamiche demografiche.

1. Introduzione

L'allungamento dell'aspettativa di vita, associato alla contemporanea riduzione dei tassi di natalità, ha portato e porterà nei prossimi decenni a significativi cambiamenti nella struttura demografica delle popolazioni dei paesi economicamente più sviluppati. Tale dinamica demografica farà aumentare il rapporto di dipendenza tra pensionati e attivi, ed il fenomeno sarà più evidente nei prossimi anni con l'approssimarsi al pensionamento delle generazioni del baby-boom. In particolare, in Italia nei prossimi decenni si abbatterà sul sistema pensionistico l'onda demografica della generazione dei baby boomers che produrrà un incremento di quasi il 50% della popolazione anziana, e, quindi, un aggravamento del saldo pensionistico (differenza tra entrate contributive e spesa per pensioni) derivante dalla consistente crescita del numero delle pensioni da erogare (Angrisani *et al.*, 2001). Questo fatto pone sfide complesse in relazione al problema della sostenibilità dei sistemi pensionistici e, in generale, dei sistemi di sicurezza sociale, e non si può sperare di farvi fronte con politiche emergenziali dell'ultima ora. Negli ultimi decenni, in diversi paesi dell'area europea sono state attuate sostanziali riforme dei sistemi pensionistici, ma ulteriori misure devono essere preventivate per garantire la sostenibilità finanziaria degli stessi.

La discussione in ambito economico ed attuariale si è concentrata sulla modalità di gestione finanziaria dei sistemi pensionistici, opponendo lo schema a capitalizzazione allo schema a ripartizione come possibile soluzione per risolvere i problemi derivanti dagli squilibri demografici di popolazioni che invecchiano. In tale contesto, Ceprini & Modigliani (2000), sostenevano che "… il finanziamento della ripartizione dei sistemi pensionistici pubblici, anche noto come *paygo*, è inaffidabile e deve essere abbandonato al più presto …" e spiegavano che “... il miglior modo per rimpiazzarlo è un sistema pubblico completamente finanziato della capitalizzazione (pilastro del risparmio obbligatorio), costruito per garantire benefici reali definiti …”, sottovalutando ampiamente l’“enorme onere” che comporta la riconversione di un sistema a ripartizione in uno a capitalizzazione.

Il problema della sostenibilità finanziaria di un sistema pensionistico non può essere ricondotto ad un problema puramente economico, ritenendo che lo stesso possa essere risolto da un’economia funzionante. L’analisi delle effettive dinamiche demografiche, alla base dell’evoluzione di un sistema pensionistico, costituisce un punto centrale del problema, che deve essere esaminato in situazioni “nonsteady-state” (Lee, 1994). Lo studio dell’effettiva dinamica demografica di una collettività comporta rilevanti difficoltà che, nella maggior parte dei casi, sono superate attraverso l’utilizzo di modelli basati su ipotesi demografiche semplificatrici (Bommier & Lee, 2003). Nel suo lavoro Samuelson (1958) consegue noti risultati relativi al tasso di rendimento da riconoscere in un sistema pensionistico gestito a ripartizione. La sua analisi è condotta, però, utilizzando un semplice modello economico e demografico di overlapping generation a due età, che non trova aderenza alle reali dinamiche demografiche. Il lavoro di Settergren e Mikula (2005) costituisce il background teorico della riforma del sistema pensionistico svedese attuata nel 2001. Come evidenzia Lee (2006) in *Discussion of “The rate of Return of Pay-As-You-Go Pension Sistems: A more Exact Consumption-Loan Model of interest*, i risultati ottenuti dagli autori sono interessanti ed utili concettualmente, ma ottenuti nell’ipotesi poco realistica di steady state sia per l’aspetto economico che per l’aspetto demografico. L’indicatore di controllo della sostenibilità del sistema, il Balance Ratio, è fondato su una variabile di stato, la Turnover Duration, che, essendo definita in ipotesi di steady state, non è in grado di identificare in modo efficace situazioni di squilibrio demografico (Angrisani & Di Palo, 2008). In accordo con le osservazioni di Lee, per affrontare in modo realistico l’analisi della sostenibilità dei sistemi pensionistici, soprattutto di quelli gestiti a ripartizione, è necessario un approccio al problema che consenta di rappresentare le dinamiche economiche e demografiche al di fuori dell’ipotesi di steady state.

L'obiettivo del lavoro consiste, quindi, nel descrivere tutte le funzioni di stato di un sistema pensionistico in un contesto generale, entro il quale rappresentare la realtà demografica effettiva senza far ricorso ad ipotesi semplificatrici. Si considera lo schema generale di un sistema pensionistico di tipo contributivo e si descrive la struttura demografica della collettività sottostante attraverso un modello continuo, nelle variabili età e tempo, senza alcuna ipotesi predefinita sull'evoluzione della mortalità.

Nel paragrafo 2 si descrivono le funzioni di stato del sistema pensionistico con riferimento ad un preciso istante di osservazione. Nel paragrafo 3 si analizza l'evoluzione nel tempo del sistema pensionistico in relazione alla situazione iniziale di riferimento. La formulazione che viene proposta consente di distinguere gli aspetti noti da quelli previsionali.

2. Il modello

L'obiettivo del lavoro è di sviluppare un modello generale di rappresentazione di un sistema pensionistico che non utilizzi ipotesi economiche e demografiche semplificatrici. Infatti, l'utilizzo di ipotesi semplificatrici di stabilità economica e demografica consente di fornire in modo immediato le condizioni di equilibrio finanziario per un sistema pensionistico a ripartizione. Tali condizioni, però, essendo fondate su ipotesi che sono, nella maggior parte dei casi, non realistiche, risultano di conseguenza poco utili.

Lo studio ha come punto di partenza la rappresentazione della realtà demografica della popolazione di un sistema pensionistico in termini di distribuzioni per età.

Per la rappresentazione della realtà demografica consideriamo funzioni reali di distribuzione per età di due variabili reali, l'età x e il tempo t. Indichiamo con $\left[0,+\infty\right)$ il dominio della variabile età, che è una variabile continua; in particolare, indichiamo con ω l'età massima raggiungibile da un individuo della collettività. Indichiamo con $\left[t_*,T\right]$ il dominio della variabile tempo; tale dominio costituisce l'intervallo temporale limitato sul quale si analizza l'evoluzione del sistema pensionistico. L'istante iniziale t_*, definito anche "istante attuale", è l'istante rispetto al quale si valuta lo status degli individui della collettività. Tutte le grandezze caratteristiche del sistema pensionistico sono note in tale istante.

Assumiamo, inoltre, le seguenti ipotesi: la vita attiva ha inizio al compimento dell'età a e termina al raggiungimento dell'età r, che indica anche l'età di inizio del pensionamento; tutti gli individui attivi lavorano dall'età a fino all'età r; le "uscite" dal sistema pensionistico possono aver luogo solo per decesso.

Al tempo iniziale t_* la collettività del sistema è suddivisa in due classi, attivi e pensionati, ciascuna delle quali è descritta da una specifica funzione densità nelle due variabili reali età e tempo. Indichiamo con $f\left(x,t_*\right)$ la funzione densità (assoluta) della distribuzione per età relativa al''intera collettività del sistema pensionistico. Ipotizziamo che tale funzione sia continua e differenziabile sul dominio della variabile età $\left[a,+\infty\right)$.

Indichiamo rispettivamente con $f^{A}\left(x,t_*\right)$ e $f^{P}\left(x,t_*\right)$ le funzioni densità (assolute) della distribuzione per età degli attivi, "attivi attuali" (e cioè attivi in essere) in t_*, e dei pensionati, "pensionati attuali" in t_*. Poniamo, quindi, che

$$f^{A}\left(x,t_*\right)=\begin{cases} f_*^{A}\left(x\right) & \text{se } a\le x<r \\ 0 & \text{se } x\ge r \end{cases}$$

$$f^{P}\left(x,t_*\right)=\begin{cases} 0 & \text{se } a\le x<r \\ f_*^{P}\left(x\right) & \text{se } x\ge r \end{cases}.$$

Si ipotizza che $f^{A}\left(x,t_*\right)$ e $f^{P}\left(x,t_*\right)$ siano continue e differenziabili sul dominio della variabile età $\left[a,+\infty\right)$, salvo che nel punto $x=r$.

La situazione demografica del sistema pensionistico è in tal modo completamente descritta in t_*. Per esempio, è possibile esprimere la totalità di ciascuna delle due popolazioni, degli attivi e dei pensionati, rispettivamente come

$$NP^A(t_*) = \int_a^r f_*^A(s)\,ds$$
$$NP^P(t_*) = \int_r^{+\infty} f_*^P(s)\,ds\,,$$

e l’indice di dipendenza è dato da

$$r(t_*) = \frac{NP^P(t_*)}{NP^A(t_*)} = \frac{\int_r^{+\infty} f_*^P(s)\,ds}{\int_a^r f_*^A(s)\,ds}\,.$$

Assumiamo ancora le seguenti ipotesi, che fissano univocamente le regole del sistema pensionistico, e che valgono per ogni istante di tempo considerato nell’intervallo prefissato.

– Il sistema pensionistico è di tipo contributivo.

– Ad ogni istante di tempo t ogni individuo attivo versa i contributi secondo una stessa aliquota assegnata.

– I contributi versati sono rivalutati al tasso istantaneo di rendimento riconosciuto all’intero debito pensionistico, tasso che indichiamo con $r_L(t)$.

– Il beneficio pensionistico è calcolato moltiplicando il montante contributivo per un coefficiente di trasformazione del capitale in rendita vitalizia fissato all’istante di pensionamento. Il coefficiente di trasformazione è, quindi, dipendente solo dall’istante di tempo in cui l’individuo della collettività raggiunge l’età di pensionamento e il suo valore è calcolato in relazione all’effettiva aspettativa di vita all’istante di pensionamento e ad un tasso tecnico (tasso esclusivamente di preconto e non di minimo garantito) scelto pari a zero.

– Il beneficio pensionistico è rivalutato al tasso istantaneo di rendimento $r_L(t)$ riconosciuto all’intero debito pensionistico.

– Non sono previste pensioni di reversibilità.

Sono inoltre definite, assunte continue e sempre differenziabili nei rispettivi domini, le seguenti funzioni dell’età x e del tempo t.

La funzione $g(x,t)$, definita e positiva per ogni $x \in [a,r)$ e per ogni $t \in [t_*,T]$, indica il flusso (medio) istantaneo di reddito utile ai fini contributivi di un individuo attivo che ha l'età x al tempo t. Assumiamo, inoltre, che $g(x,t)=0$ per ogni età $x \geq r$.

La funzione $\alpha(t)$, definita per ogni $t \in [t_*, T]$, indica l'aliquota contributiva, e, quindi, ipotizziamo che $\alpha(t) \geq 0$ per ogni istante t appartenente all'intervallo considerato.

La funzione $b(x,t)$, definita e positiva per ogni $x \in [r, +\infty)$ e per ogni $t \in [t_*, T]$, indica il flusso (medio) istantaneo di beneficio pensionistico di un individuo che ha l'età x al tempo t. Assumiamo, inoltre, che $b(x,t)=0$ per ogni età $x < r$.

Si possono, quindi, descrivere le funzioni di stato del sistema pensionistico al tempo t_*.

Il flusso istantaneo di contribuzione è dato da

$$C(t_*) = \int_a^r f^A(s,t_*)\alpha(t_*)g(s,t_*)ds.$$

Il flusso istantaneo di spesa pensionistica è dato da

$$P(t_*) = \int_r^{+\infty} f^P(s,t_*)b(s,t_*)ds.$$

In base alle regole stabilite, poiché il beneficio pensionistico è rivalutato istante per istante a partire dall'età di pensionamento, si ha, quindi, che

(1) $$b(s,t_*) = b(r, t_* - s + r) e^{\int_{t_* - s + r}^{t_*} r_L(\tau) d\tau},$$

dove $b(r, t_* - s + r)$ è il beneficio pensionistico iniziale per un individuo che ha raggiunto l'età r di pensionamento all'istante $t_* - s + r$. Poiché il sistema è di tipo contributivo, la pensione iniziale è data dal prodotto del montante contributivo, accantonato nell'intero arco della vita lavorativa, per un opportuno coefficiente di trasformazione. Secondo il principio di equità attuariale, si ha, quindi, che

$$b(r, t_* - s + r) = M(r, t_* - s + r) \ \ ct(t_* - s + r),$$

dove $M\left(r,t_*-s+r\right)$ è il montante contributivo individuale (medio) accumulato durante l'intera fase lavorativa; $ct\left(t_*-s+r\right)$ è il coefficiente di trasformazione del capitale in rendita, fissato all'età di pensionamento. Tale coefficiente sintetizza quelle che sono le condizioni demografiche e economiche all'istante di pensionamento, nel senso che il suo valore dipende dall'aspettativa di vita all'età di pensionamento e dal valore ipotizzato per il tasso tecnico. Dal momento che si è assunto uguale a zero il valore del tasso tecnico e non sono stati presi in considerazione aspetti come benefici ai superstiti, il coefficiente di trasformazione è puramente demografico. Nello specifico, il reciproco del coefficiente di trasformazione è pari all'aspettativa di vita. Indicata con $e\left(x,t\right)$ la funzione aspettativa di vita per un individuo di età x al tempo t, che assumiamo non decrescente sia rispetto all'età che rispetto al tempo, vale la seguente

(2)
$$\frac{1}{ct\left(t_*-s+r\right)}=e\left(r,t_*-s+r\right),$$

e vale anche

$$b\left(r,t_*-s+r\right)e\left(r,t_*-s+r\right)=M\left(r,t_*-s+r\right).$$

Essendo il montante contributivo individuale pari al totale dei contributi versati e dei rendimenti riconosciuti, la sua espressione per un individuo di età r all'istante t_*-s+r è data da

(3)
$$M\left(r,\, t_*-s+r\right)=\int_a^r \alpha\left(t_*-s+u\right)\, g\left(u,t_*-s+u\right)\, e^{\int_{t_*-s+u}^{t_*-s+r} r_L(\tau)d\tau}\, du\,.$$

Pertanto, l'espressione del flusso istantaneo di spesa pensionistica in t_* è data da

$$P\left(t_*\right)=\int_r^{+\infty} f^P\left(s,t_*\right)\left(\int_a^r \alpha\left(t_*-s+u\right)\, g\left(u,t_*-s+u\right)\, e^{\int_{t_*-s+u}^{t_*-s+r} r_L(\tau)d\tau}\, du\right)$$
$$ct\left(t_*-s+r\right)e^{\int_{t_*-s+r}^{t_*} r_L(\tau)d\tau}\, ds\,.$$

Al tempo t_* sono così esplicitate le funzioni di flusso istantaneo del sistema pensionistico, sia di contribuzione che di spesa.

Inoltre, è possibile esplicitare l'espressione analitica del debito del sistema pensionistico che indichiamo con $L(t)$, la cui valutazione risulta rilevante ai fini di un'analisi di sostenibilità nell'intervallo temporale prefissato. Il debito pensionistico risulta diviso nelle due componenti, una per il debito nei confronti degli attivi e l'altra per il debito nei confronti dei pensionati. Abbiamo, cioè, che

$$L(t_*) = L^A(t_*) + L^P(t_*)$$

con $L(t_*)$ debito totale del sistema pensionistico, $L^A(t_*)$ debito latente, cioè debito nei confronti degli attivi, e $L^P(t_*)$ debito corrente, cioè debito nei confronti dei pensionati (Angrisani, 2008).

Dal momento che il sistema pensionistico è di tipo contributivo, il debito latente è, per definizione, pari a

$$L^A(t_*) = \int_a^r f^A(s,t_*) M(s,t_*) \; {}_{r-s}p(s,t_*)\, ds$$

dove ${}_{r-s}p(s,t_*)$ indica la probabilità che un individuo di età s in t_* sia in vita all'età r [1]. Per la (3), segue che

$$L^A(t_*) = \int_a^r f^A(s,t_*) \left(\int_a^s \alpha(t_* - s + u)\, g(u, t_* - s + u)\, e^{\int_{t_*-s+u}^{t_*} r_L(\tau)\, d\tau} du \right) {}_{r-s}p(s,t_*)\, ds.$$

Il debito corrente è, per definizione, pari a

$$L^P(t_*) = \int_r^{+\infty} f^P(s,t_*) b(s,t_*)\, e(s,t_*)\, ds \; ,$$

con $e(s,t_*)$ aspettativa di vita all'età s al tempo t_*. Tenuto conto dell'espressione del beneficio pensionistico, definito dalla (1), e del montante contributivo, definito dalla (3), si ottiene

---

[1] Si può diversamente ipotizzare che i montanti degli individui attivi che escono dal sistema a causa del decesso siano distribuiti tra i rimanenti. In tal caso, il debito latente coincide con il "totale" dei montanti contributivi degli attivi.

$$L^P(t_*) = \int_r^{+\infty} f^P(s,t_*) \left(\int_a^r \alpha(t_* - s + u)\; g(u, t_* - s + u)\; e^{\int_{t_*-s+u}^{t_*-s+r} r_L(\tau)d\tau} du \right)$$

$$ct(t_* - s + r) e^{\int_{t_*-s+r}^{t_*} r_L(\tau)d\tau} e(s,t_*)ds,$$

e, per la (2), si ottiene quindi

$$L^P(t_*) = \int_r^{+\infty} f^P(s,t_*) \left(\int_a^r \alpha(t_* - s + u) g(u, t_* - s + u) e^{\int_{t_*-s+u}^{t_*} r_L(\tau)d\tau} du \right)$$

$$\frac{e(s,t_*)}{e(r,t_* - s + r)} ds \quad .$$

Il debito corrente è così decomposto in tre fattori: il primo è relativo alla numerosità della collettività dei pensionati, il secondo dipende dalle dinamiche reddituali, contributive e finanziarie ed il terzo è un fattore puramente demografico pari al rapporto dell'aspettativa di vita all'età s valutata all'istante t_* rispetto all'aspettativa di vita all'età r valutata all'istante $t_* - s + r$.

3. L'evoluzione del sistema pensionistico

Sia t un istante di tempo appartenente all'intervallo temporale prefissato $[t_*, T]$ e tale che $t_* < t < t_* + (r - a)$.

La collettività del sistema pensionistico si è modificata nella sua struttura per l'ingresso di nuovi individui nella fase attiva o nella fase di pensionamento, oppure per il decesso di individui attivi o pensionati nell'intervallo di tempo tra t_* e t. Le due collettività iniziali, rispettivamente degli attivi attuali e dei pensionati attuali in t_*, si dividono ciascuna in ulteriori due sottocollettività.

Cominciamo ad esaminare la popolazione attiva. Nell'intervallo di tempo considerato $(t_*, t]$, questa si è modificata nella sua numerosità per l'ingresso di nuovi individui nell'attività lavorativa, per l'uscita di individui, già attivi al tempo t_*, o per causa morte o per ingresso nella fase di pensionamento. Pertanto, al tempo t la popolazione degli attivi è suddivisa in due classi, quella relativa ai nuovi ingressi nell'intervallo di tempo $\left(t_*, t\right]$, la cui numerosità sarà indicata con $NP_{na}^{A}\left(t\right)$, e quella relativa agli individui già attivi in t_* e che sono ancora attivi in t, la cui numerosità sarà indicata con $NP_*^{A}\left(t\right)$. Pertanto, la numerosità della popolazione attiva al tempo t è data da

$$NP^{A}\left(t\right) = NP_{na}^{A}\left(t\right) + NP_*^{A}\left(t\right) \ .$$

Sia $N\left(a,\tau\right)$ la funzione densità dei nuovi ingressi nel sistema di individui che hanno l'età a al tempo τ, funzione definita per ogni istante di tempo τ tale che $t_* \le \tau \le t$, e sia ${}_{\Delta x}p\left(x,t\right)$ la probabilità che un individuo di età x al tempo t sia in vita all'età $x+\Delta x$ al tempo $t+\Delta t$, essendo naturalmente $\Delta x = \Delta t$. In particolare , si assume che al tempo t_* sia $N\left(a, t_*\right) = f_*^{A}\left(a\right)$.

La funzione densità dei "nuovi" attivi in t è data da

$$f_{na}^{A}\left(x,t\right) = \begin{cases} N\left(a, t-x+a\right) {}_{x-a}p\left(a, t-x+a\right) & \text{se } a \le x < a+\left(t-t_*\right) \\ 0 & \text{se } x \ge a+\left(t-t_*\right) \end{cases}$$

e la funzione densità degli attivi in t, che erano già attivi in t_*, è data da

$$f_*^{A}\left(x,t\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \le x < a+\left(t-t_*\right) \\ f_*^{A}\left(x-\left(t-t_*\right)\right) {}_{t-t_*}p\left(x-\left(t-t_*\right), t_*\right) & \text{se } a+\left(t-t_*\right) \le x < r . \end{cases}$$

Quindi, la funzione densità della popolazione degli attivi in t è definita come

$$f^{A}\left(x,t\right) = \begin{cases} f_{na}^{A}\left(x,t\right) + f_*^{A}\left(x,t\right) & \text{se } a \le x < r \\ 0 & \text{se } x > r \end{cases} =$$

(4)
$$= \begin{cases} N\left(a, t-x+a\right) {}_{x-a}p\left(a, t-x+a\right) & \text{se } a \le x < a+\left(t-t_*\right) \\ f_*^{A}\left(x-\left(t-t_*\right)\right) {}_{t-t_*}p\left(x-\left(t-t_*\right), t_*\right) & \text{se } a+\left(t-t_*\right) \le x < r \\ 0 & \text{se } x \ge r \end{cases}$$

Analogamente la collettività dei pensionati si può esprimere come

$$NP^P(t) = NP^P_{np}(t) + NP^P_*(t) \ ,$$

dove $NP^P_{np}(t)$ è la popolazione costituita dai "nuovi" pensionati in t, costituita dalla totalità degli individui attivi in t_* che sono entrati nella fase di pensionamento nell'intervallo di tempo $\left(t_*, t\right]$, e $NP^P_*(t)$ è la popolazione dei pensionati in t, pari alla popolazione dei pensionati in t_* ridotta a causa dei decessi.

La funzione densità della popolazione dei "nuovi" pensionati in t è definita come

$$f^P_{np}(x,t) = \begin{cases} f^A_*\left(x-(t-t_*)\right) {}_{t-t_*}p\left(x-(t-t_*),t_*\right) & \text{se } r \le x < r+(t-t_*) \\ 0 & \text{se } x \ge r+(t-t_*) \end{cases} .$$

La funzione densità della popolazione dei pensionati in t già pensionati in t_* è definita come

$$f^P_*(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \le x < r+(t-t_*) \\ f^P_*\left(x-(t-t_*)\right) {}_{t-t_*}p\left(x-(t-t_*),t_*\right) & \text{se } x \ge r+(t-t_*) \end{cases} .$$

Quindi, la funzione densità della popolazione degli attivi in t è definita come

$$f^P(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \le x < r \\ f^P_{np}(x,t) + f^P_*(x,t) & \text{se } x \ge r \end{cases} =$$

(5)
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a \le x < r \\ f^A_*\left(x-(t-t_*)\right) {}_{t-t_*}p\left(x-(t-t_*),t_*\right) & \text{se } r \le x < r+(t-t_*) \\ f^P_*\left(x-(t-t_*)\right) {}_{t-t_*}p\left(x-(t-t_*),t_*\right) & \text{se } x \ge r+(t-t_*) \end{cases}$$

Il modello proposto consente di effettuare l'analisi al tempo t delle funzioni del sistema pensionistico

Consideriamo il flusso istantaneo di contribuzione, che è espresso dalla seguente

(6)
$$C(t) = \int_a^r f^A(s,t)\alpha(t)g(s,t)ds .$$

La collettività degli attivi in t è suddivisa in due componenti, una derivante dalla nuova collettività che si è formata per effetto degli ingressi tra $\left(t_*, t\right]$, ed una derivante dalla collettività già esistente in t_*. Per la (4) si ha

(7)
$$\begin{aligned} C(t) = & \int_a^{a+(t-t_*)} N(a, t-s+a)\, {}_{s-a}p(a, t-s+a)\,\alpha(t)\, g(s,t)\, ds \\ & + \int_{a+(t-t_*)}^{r} f_*^A\left(s-(t-t_*)\right)\, {}_{t-t_*}p\left(s-(t-t_*), t_*\right)\alpha(t)\, g(s,t)\, ds . \end{aligned}$$

La funzione di flusso istantaneo di spesa pensionistica è espressa da

(8)
$$P(t) = \int_r^{+\infty} f^P(s,t)\, b(s,t)\, ds .$$

Per la definizione data nella (6) della funzione densità dei pensionati $f^P(x,t)$, il flusso di spesa pensionistico può essere separato in due componenti, una relativa alla spesa per i “nuovi” pensionati rispetto all’istante t_*, che indichiamo con $P_{np}(t)$, ed un’altra relativa ai pensionati che erano già pensionati in tale istante e che indichiamo con $P_*(t)$. Risulta, quindi, che

(9)
$$\begin{aligned} P(t) = & P_{np}(t) + P_*(t) = \\ & = \int_r^{r+(t-t_*)} f_{np}^P(s,t)\, b(s,t)\, ds + \int_{r+(t-t_*)}^{+\infty} f_*^P(s,t)\, b(s,t)\, ds . \end{aligned}$$

Osserviamo che nell’espressione del beneficio pensionistico per i “nuovi” pensionati è implicitamente contenuto un coefficiente di trasformazione non noto nell’istante attuale t_*, il cui valore risulterà determinato dalla situazione demografica all’istante $t-s+r > t_*$, mentre per i pensionati, già pensionati in t_*, il coefficiente di trasformazione è noto e non modificabile al tempo t. L’analisi della funzione di spesa pensionistica tra gli istanti di tempo t_* e t è condotta, in tal modo, separatamente per le due classi così da poter governare l’esistente al tempo t_*, gestire l’aspetto previsionale e distinguere i gradi di incertezza relativi alle due diverse sottocollettività.

Consideriamo l'espressione del debito pensionistico al tempo t. Si ricorda che l'istante di tempo t considerato è tale che $t - t_* < r - a$, cioè la durata temporale dell'intervallo $t - t_*$ non supera la durata della fase lavorativa, potendo essere anche $t - t_* > \omega - r$. In tal modo, la collettività degli attivi in t è formata sia da individui "nuovi" attivi rispetto a t_* sia da individui già attivi in t_*, mentre la collettività dei pensionati in t può anche essere costituita solo da individui "nuovi" pensionati rispetto a t_*. Per quanto riguarda il debito pensionistico, si ha quindi che

$$L(t) = L^A(t) + L^P(t) = \\ = L^A_{na}(t) + L^A_*(t) + L^P_{np}(t) + L^P_*(t)$$

con $L^A_{na}(t)$ funzione del debito per i "nuovi" attivi, in cui si rileva il forte aspetto previsionale sotto il profilo demografico (ipotesi su intensità dei nuovi ingressi e probabilità di sopravvivenza), oltre che sotto il profilo economico e finanziario (ipotesi su aliquota contributiva e sulle variabili economiche), con $L^A_*(t)$, $L^P_{np}(t)$ e $L^P_*(t)$ funzioni del debito pensionistico rispettivamente per gli attivi già attivi in t_*, per i "nuovi" pensionati prima attivi in t_*, per pensionati già pensionati in t_*. Ciascuna di queste tre ultime funzioni dipende dalla funzione densità della distribuzione per età specifica delle due classi, attivi e pensionati attuali, funzioni note al tempo t_*. L'aspetto previsionale è perciò limitato alle ipotesi sulle future probabilità di sopravvivenza e sulle future dinamiche economiche e finanziarie.

4. Conclusioni

Il lavoro propone un modello descrittivo di un sistema pensionistico di tipo contributivo in cui le funzioni economiche e demografiche sono utilizzate senza alcuna ipotesi semplificatrice. L'obiettivo consiste nel delineare un contesto matematico generale nel quale poter definire condizioni di sostenibilità logica (Angrisani, 2008). In tal modo, si possono superare i limiti di un approccio che, con ipotesi semplificatrici sulla rappresentazione della realtà (ipotesi di steady state), consegue molto facilmente condizioni di sostenibilità che, però, risultano prive di utilità.

Bibliografia

1. Angrisani M., De Filippi G., Marè M., Pedone A., Pennisi G., & Zecchini S. (2001). *Le pensioni: guida a una riforma.* Roma: Ideazione Editrice.
2. Angrisani, M. (2008). *The logical sustainability of the pension system.* Pure Mathemathics and Applications, vol. 19, pp. 67-81.
3. Angrisani, M., & Di Palo, C. (2008). *L'indicatore di sostenibilità del sistema pensionistico svedese: aspetti caratteristici e punti critici*. Atti del XV Convegno di Teoria del Rischio. Università degli Studi del Molise (Campobasso), vol. 138, pp. 7-30. Roma: ARACNE editrice.
4. Bommier, A., & Lee, R. (2003). *Overlapping generations models with realistic demography*. Journal of Population Economics, pp. 135-160.
5. Ceprini, M., & Modigliani, F. (2000). *Come salvare la pensione riformando il metodo di finanziamento dei sistemi previdenziali europei: il caso dell'Italia.* Rivista di politica economica, vol. 90, pp. 186-203.
6. Demetrius, L. (1979). *Relations between Demographic Parameters*. Demography, vol. 16 (2), pp. 329-338.
7. Di Palo, C. (2007). *The Survival Potential and the Life Expectancy evaluation*. Pure Mathematics and Applications.
8. Lee, R. (1994). *The formal demography of population aging, transfers, and the economic life cycle.* Demography of Aging, pp. 8-49.
9. Lee, R. (2006). *Discussion of "The rate of return of pay-as-you-go pension systems: a more exact consumption-loan model of interest*". In Holzmann, R., & Palmer, E. *Pension reform: Issues and prospects for non-financial defined contribution (NDC) schemes.* World Bank Publications.

10. Samuelson, P. (1958). *An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money*. The journal of political economy, vol. 66 (6).
11. Settergren, O., & Mikula, B. (2005). *The rate of return of pay-as-you-go pension systems: a more exact consumption-loan model of interest*. Journal of Pension Economics and Finance, vol. 4 (02), pp. 115-138.
12. SSIA. (2008). *Orange Report Annual Report of the Swedish Pension System 2008.* Stockolm: Swedish Social Insurance Agency (SSIA).